

---

# Gamma回帰による デフォルト債権回収額推計モデルの実証研究

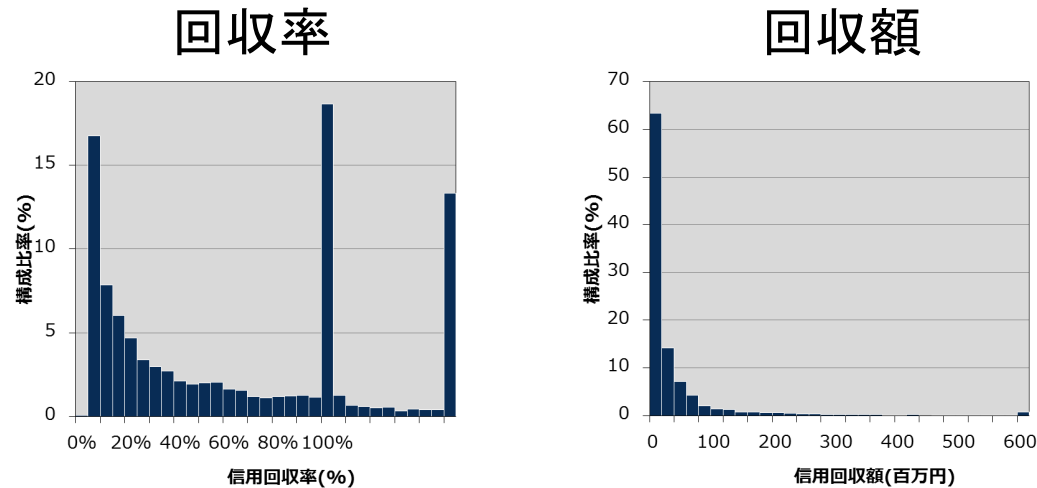
---

今井健太郎, 尾藤剛

日本リスク・データ・バンク株式会社

中小企業向け融資のデフォルト債権からの回収を推計

1. 回収源泉別に仕分け
2. 回収率ではなく回収額を推計



3. 金融機関側の意思決定を考慮

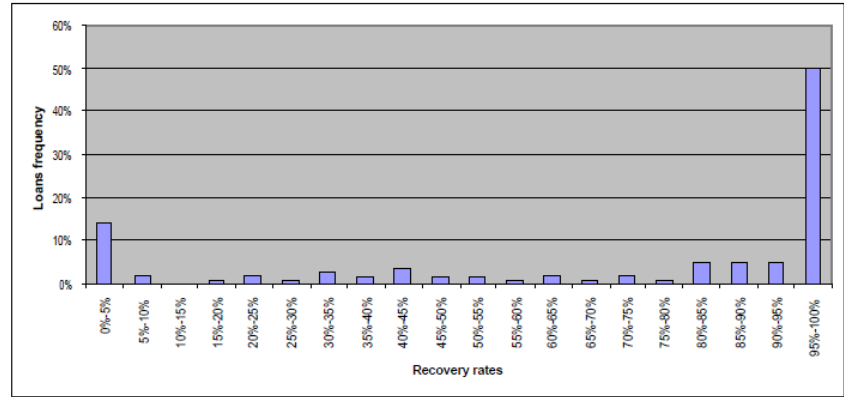
$$EL = PD \times LGD \times EAD = PD \times (1-RR) \times EAD$$

予想損失額	EL	(Expected Loss)
デフォルト確率	PD	(Probability Default)
デフォルト時損失率	LGD	(Loss Given Default)
回収率	RR	(Recovery Rate) = 1-LGD
デフォルト時貸出残高	EAD	(Exposure at Default)
PD推計モデル	⇒	確立された手法が存在
回収率推計モデル	⇒	手法はまだ未確定

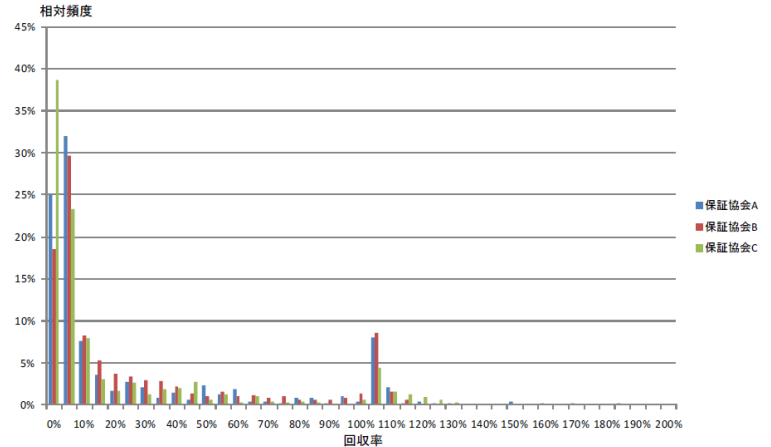
# 回収率の分布はbimodal型

## Dermine and Carvalho(2006)

Figure 3. Distribution of Cumulative Recovery Rates 48 Months after Default



## 伊藤, 山下(2007)



## 尾木, 戸城, 枇々木(2012)

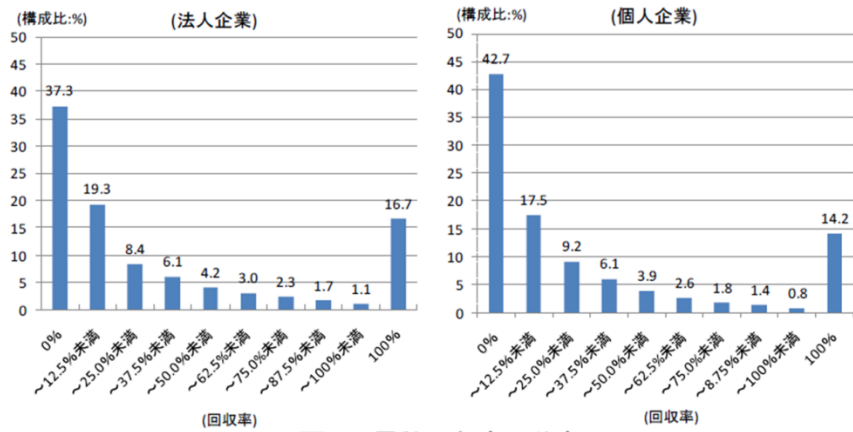
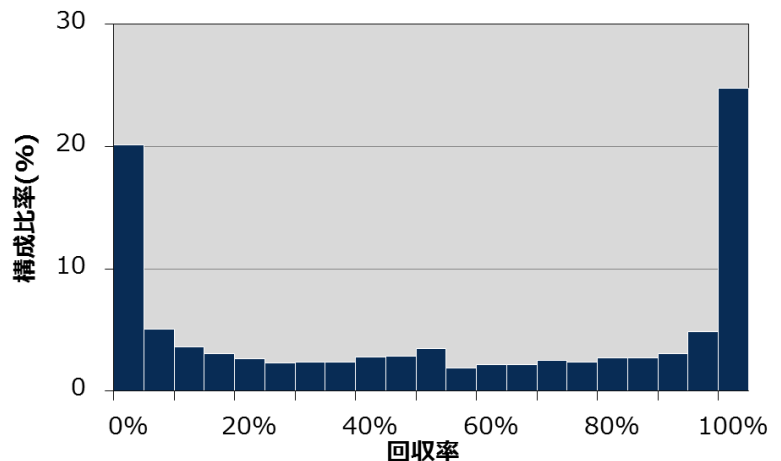


図3 累積回収率の分布

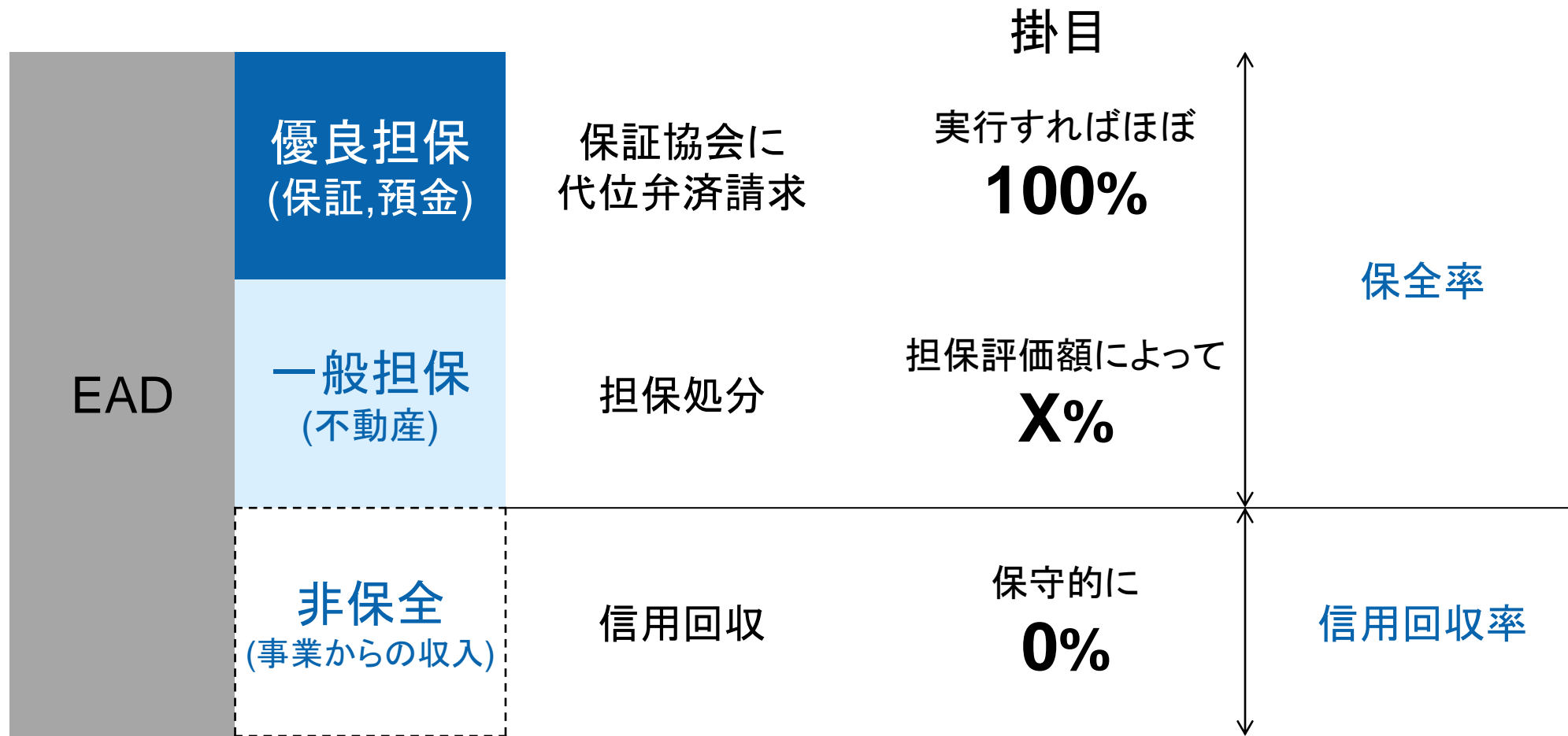
## 日本リスク・データ・バンク



## 技術的課題

推計対象の回収率がbimodal型の分布  
負の回収率の推計

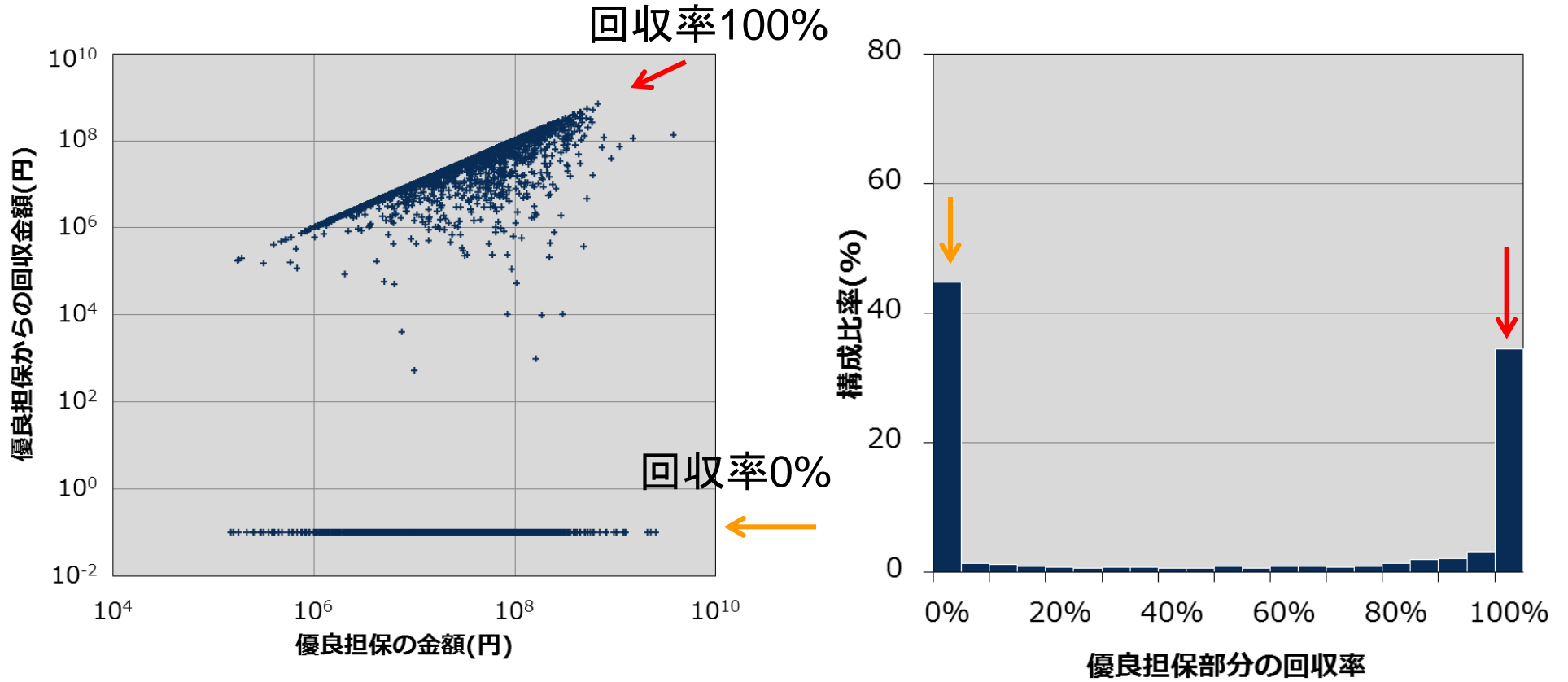
Gupton, Stein(2005)	回収率をBeta分布に近似した回帰モデル Moody's LossCalc™ V2
Grippa, Iannotti, Leandri(2005)	回収率をロジット変換 $T_{RR} = \log(RR/(1-RR))$ F-logit回帰
Dermine, Carvalho(2006)	log-log 関数による回帰モデル
伊藤, 山下(2008)	回収率0%,0%超50%未満, 50%超100%未満,100%の順序 ロジットモデル
森平(2009)	0%と100%で打ち切りがある両側Tobitモデル
Douglas, Irina(2009)	回収率の推計値が0から1に入るような"final transform" Moody's LossCalc™ V3.0
Bellotti, Crook(2009)	回収率を変換したOLS, Tobit, Decision Tree, othersを比較
川田, 山下(2012)	正常復帰確率、毀損発生確率, LGD推計の多段モデル
尾木, 戸城, 批々木(2012)	回収率0%,0%超100%未満,100%の順序ロジットモデル



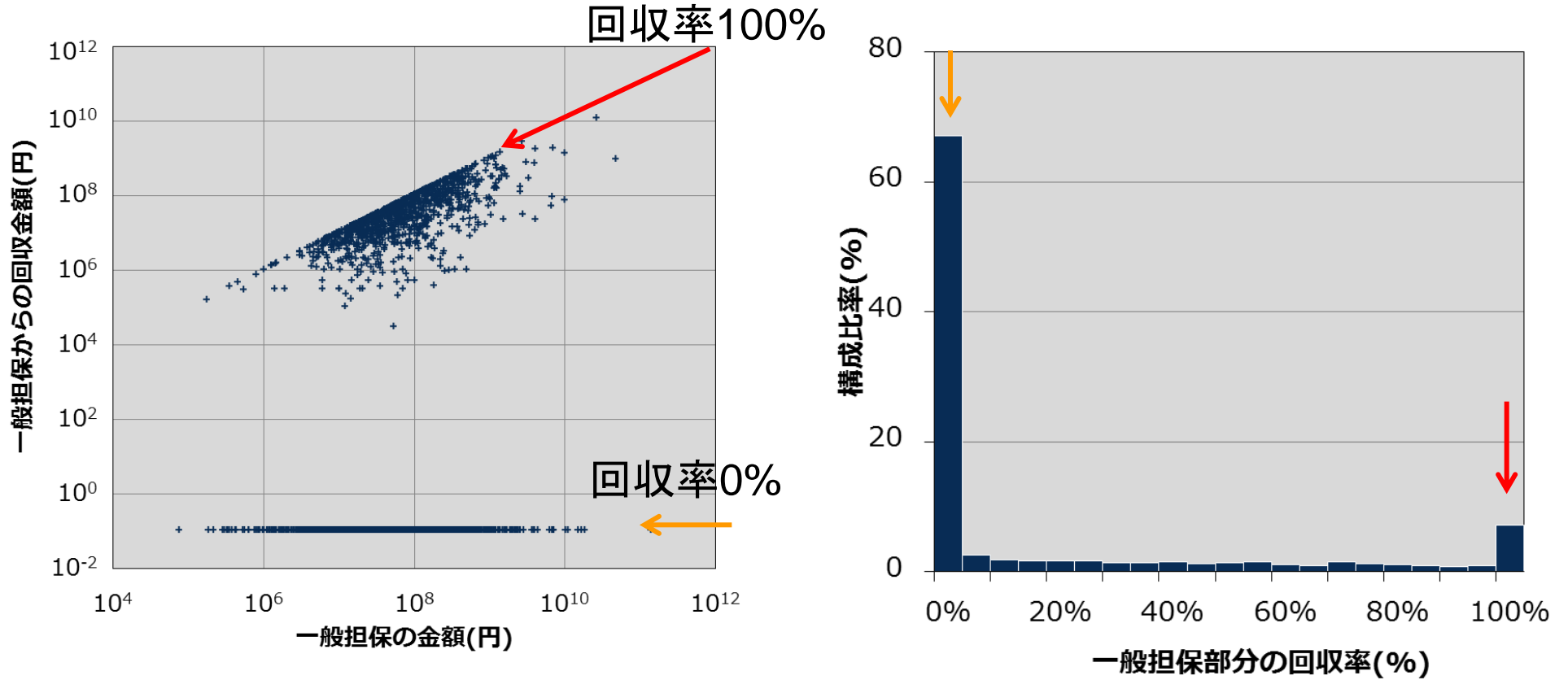
## 実務的な課題

保全率を推計回収率とした場合、非保全の割合が増加すると推計回収率は低下(無担保無保証債権では0%)

## 優良担保

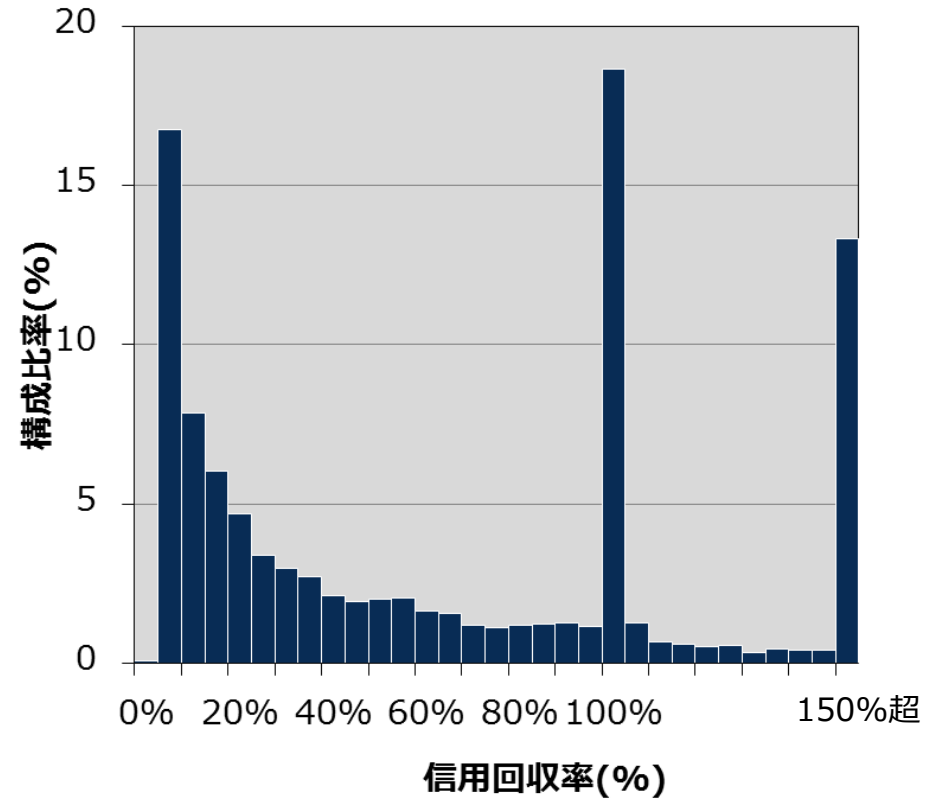
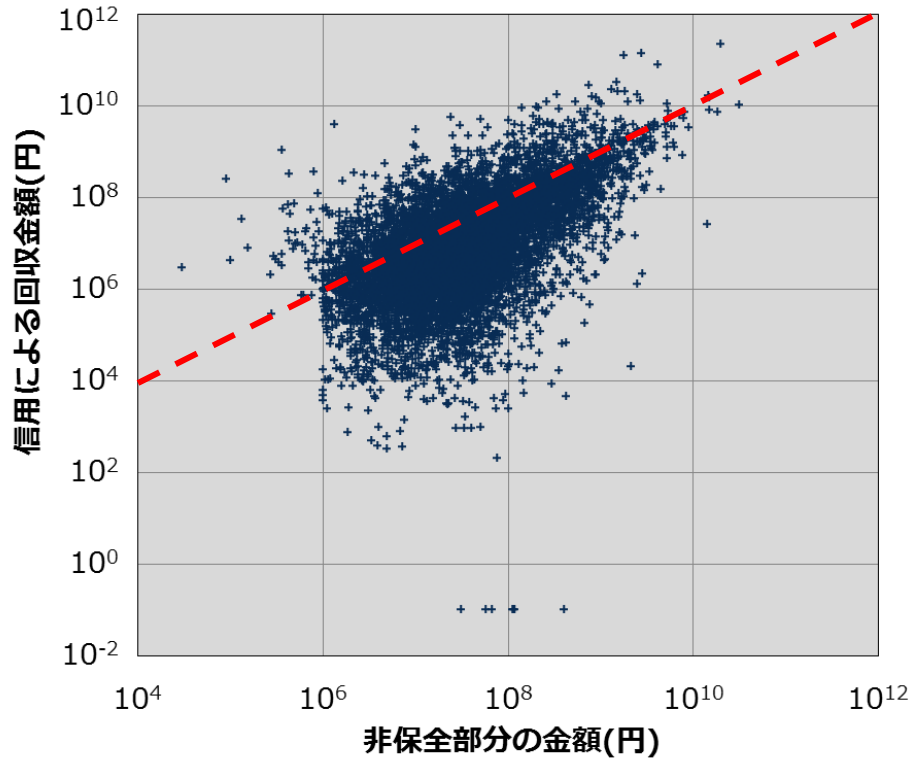


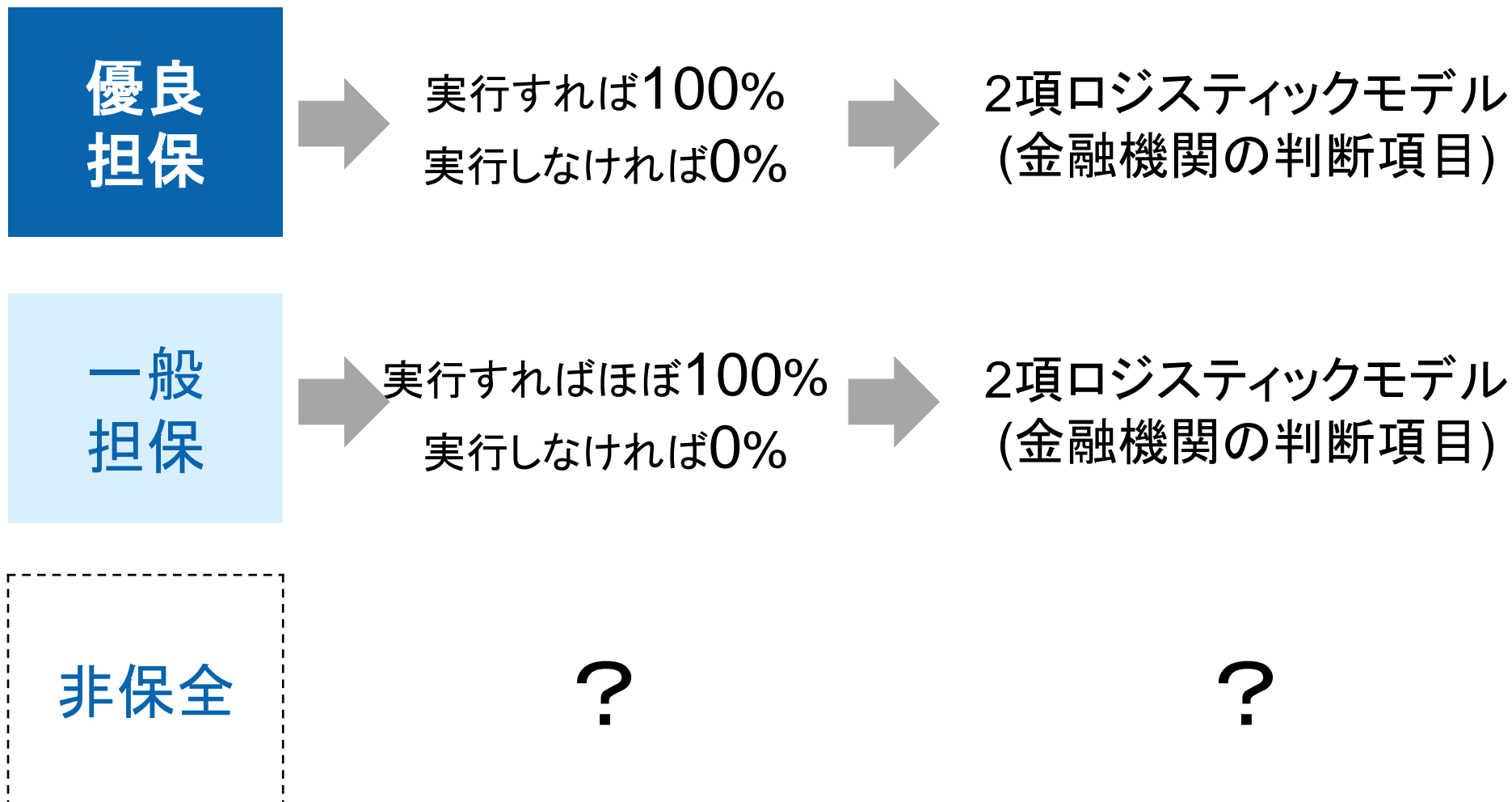
## 一般担保



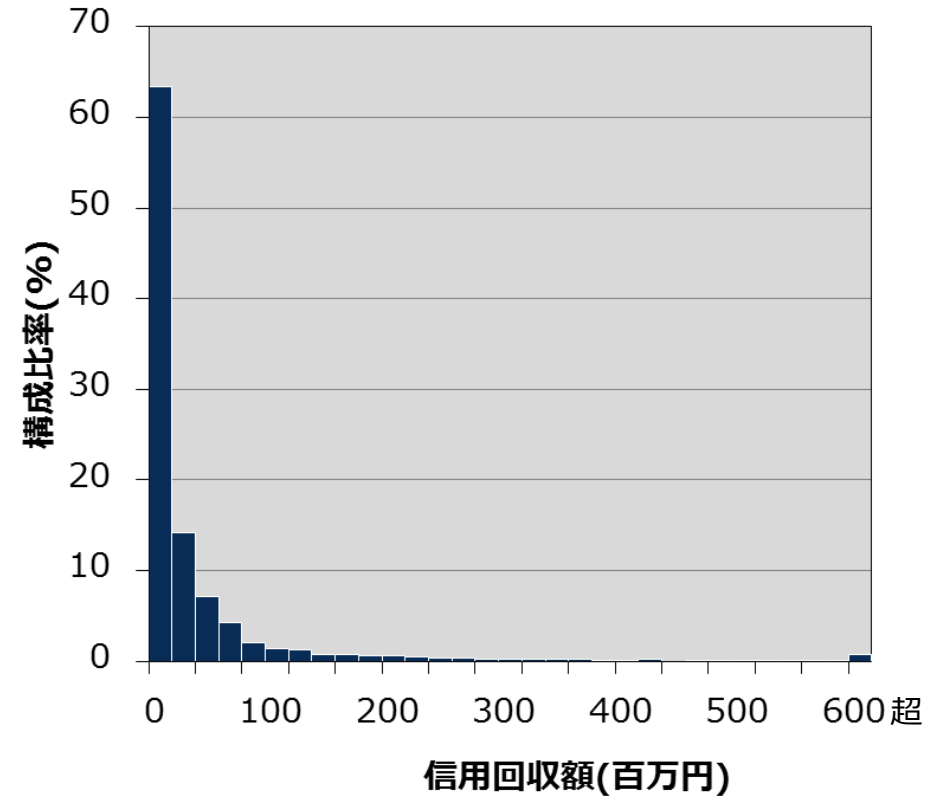
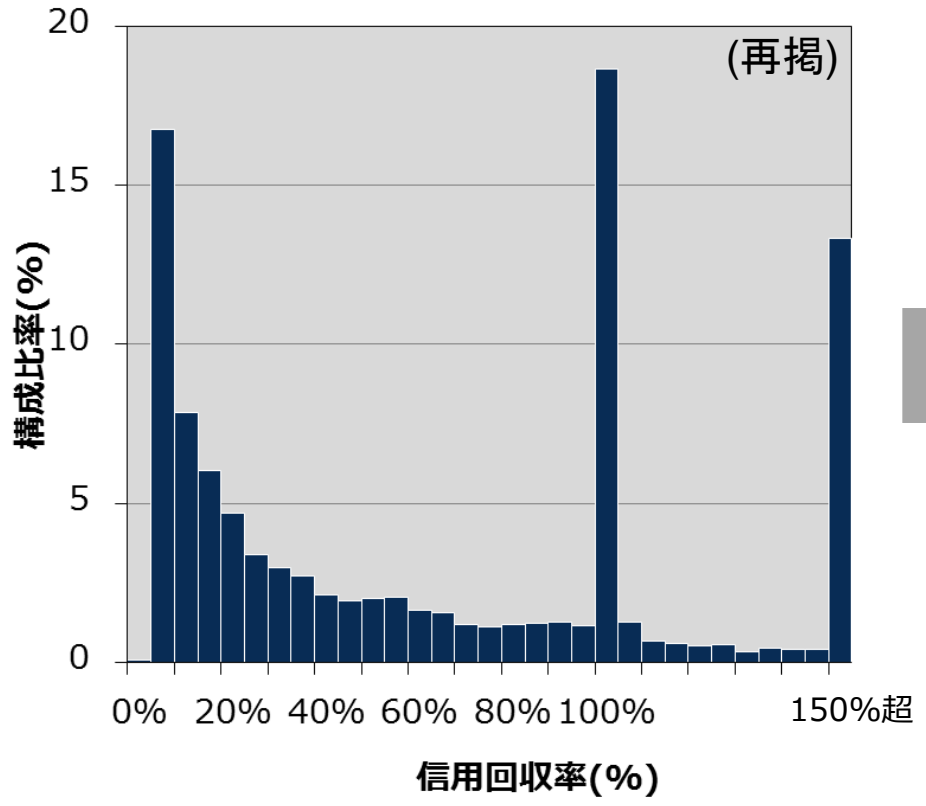


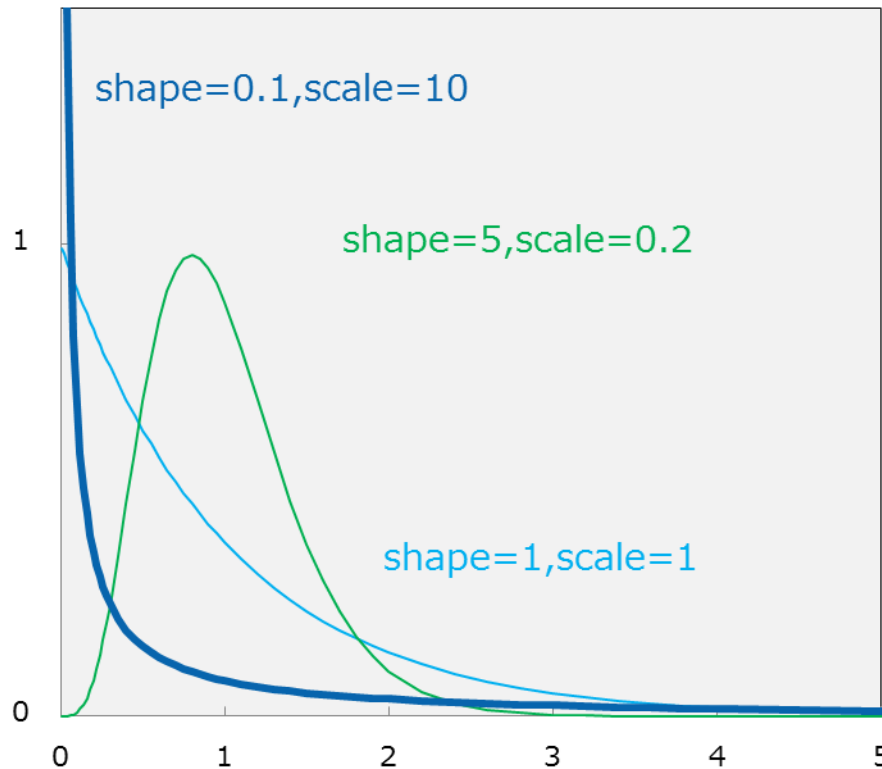
## 非保全





# 推計対象を回収率ではなく回収額にして扱いやすく





## Gamma分布の確率密度関数

$$f(y) = \frac{1}{\Gamma(s)} r^s y^{s-1} \exp(-ry)$$

$s$ : shapeパラメータ

$r$ : rateパラメータ

$1/r$ : scaleパラメータ

確率変数のとりうる範囲が0超の連続型確率分布

“Today **GLMs** are widely recognized as industry standard method for pricing passenger auto and other personal lines and small commercial lines **insurance** in the European Union and many other markets.” Duncan, et al.(2007)

“Continuous **insurance** variables are usually non-negative and skew to the right.”, “**Generalized linear modeling**, using a response distribution that is concentrated on the non-negative axis. Examples are the **gamma** and inverse Gaussian distributions.” Jong and Heller(2008)“

“**損害保険**での**GLM**の利用”, “保険金単価の誤差は期待値の大きさに比例するものと考えられる→エラー関数として**ガンマ分布**を選択“  
日本アクチュアリー会 パネルディスカッション『GLMは日本に定着するか』(2013)

McCullagh and Nelder(1989)

線型モデル  $Y = X\beta + \varepsilon$

別の表現  $E(Y) = \mu = X\beta$

## 線型モデルの仮定

LM1:  $Y$ の成分は互いに独立で正規分布、分散 $\sigma^2$ は均一(等分散)

LM2:  $X\beta$ は線形予測子 $\eta$

LM3:  $E(Y)$ と線形予測子 $\eta$ は恒等式で関連づけられている

$$E(Y) \equiv \mu = \eta$$

McCullagh and Nelder(1989)

## 一般化線型モデルへの拡張

**GLM1:**  $Y$ の成分は互いに独立で、指数型分布族に含まれる分布であればよい

**GLM2:**  $X\beta$ は線形予測子 $\eta$

**GLM3:**  $E(Y)$ と線形予測子 $\eta$ はリンク関数 $g$ で結びつけられている

$$E(Y) \equiv \mu = g^{-1}(\eta)$$

または

$$g(E(Y)) \equiv g(\mu) = \eta$$

※ $g$ は微分可能な単調関数

平均回収額 $\mu_i$ は財務指標 $z_i$ の単調増加関数

$$\mu_i = Az_i^b$$

$A = \exp(a)$ とおいてから、全体を指数でまとめる

$$\mu_i = \exp(a) z_i^b = \exp(a + b \log z_i)$$

$$\log(\mu_i) = a + b \log z_i$$

線形予測子  $\eta_i = a + b \log z_i = a + bx_i$

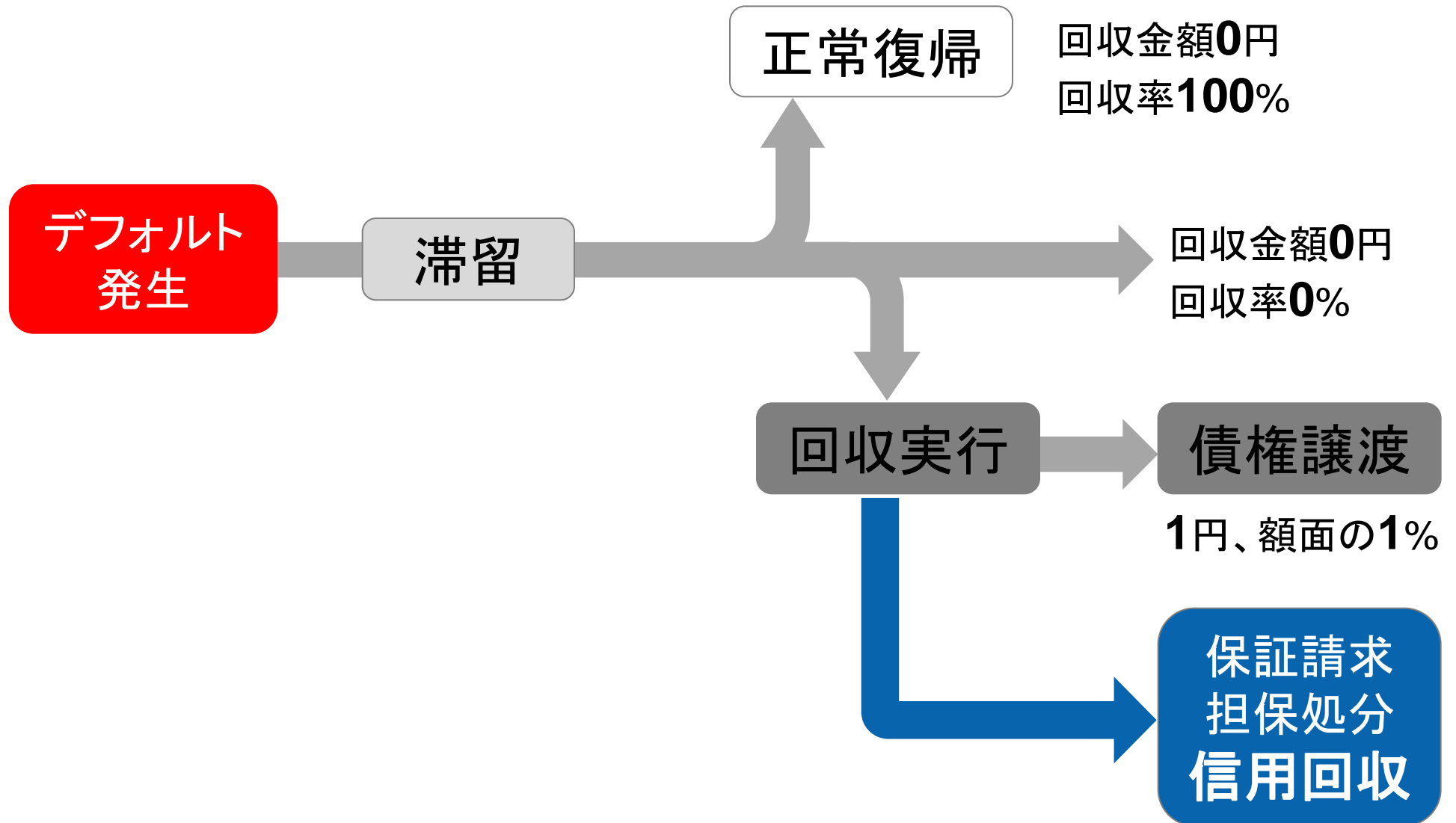
リンク関数  $\log$

(久保 2012)

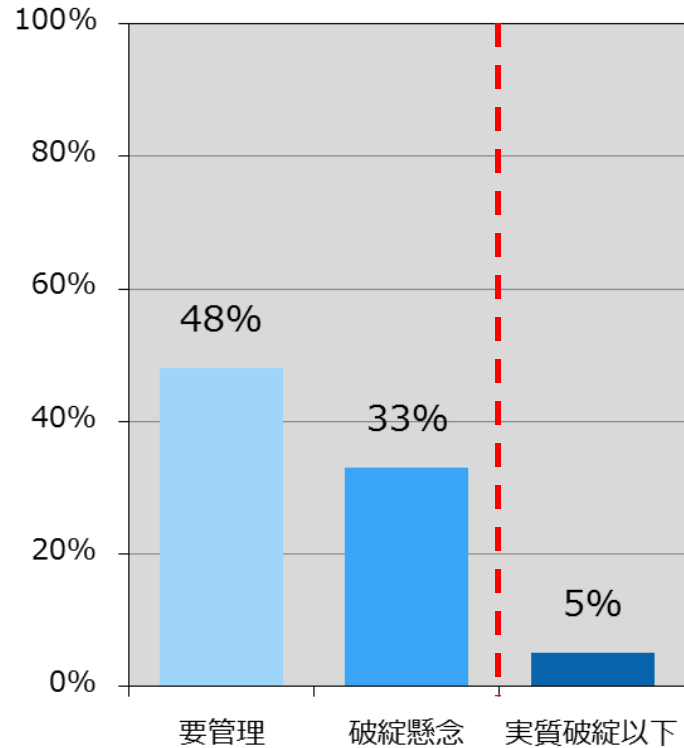


No.	被説明変数	被説明変数の変数変換	手法
1	回収額 Recovery Amount		GLM, Gamma, 対数リンク
2	回収額 Recovery Amount		GLM, Normal, 対数リンク
3	回収額 Recovery Amount		LM
4	回収額 Recovery Amount	対数変換	LM
5	回収率 Recovery Rate		LM
6	回収率 Recovery Rate	100%と0%に丸め処理	LM
7	回収率 Recovery Rate	Logit変換	LM
8	回収率 Recovery Rate	Beta変換	LM

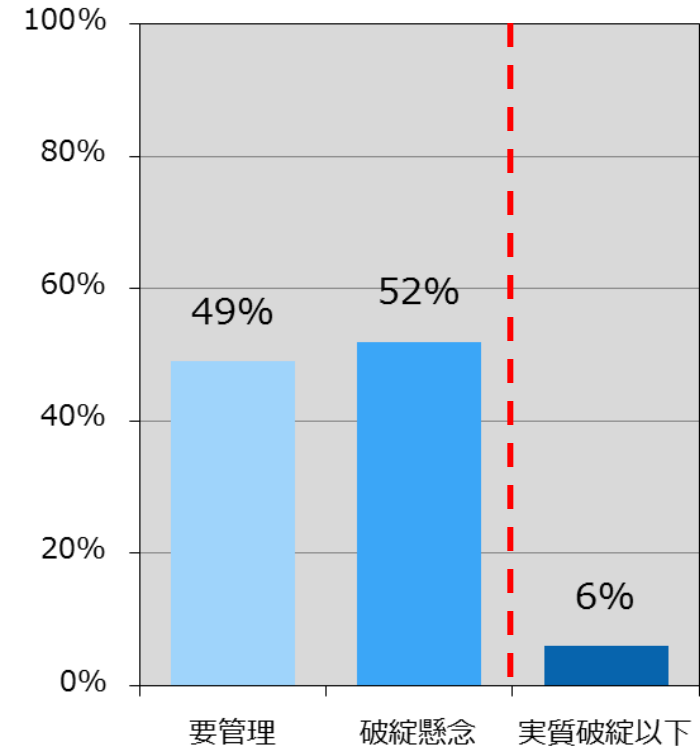
No.	モデル式	被説明変数の変数変換	被説明変数Y
1	$\log(E(Y)) = a + \sum b_j x_j + \log \xi$	誤差構造はGamma分布	回収額 RA
2	$\log(E(Y)) = a + \sum b_j x_j + \log \xi$	誤差構造は正規分布	回収額 RA
3	$E(Y) = a + \sum b_j x_j$		回収額 RA
4	$E(\log(Y)) = a + \sum b_j x_j$		回収額 RA
5	$E(Y) = a + \sum b_j x_j$		回収率 RR
6	$E(Y) = a + \sum b_j x_j$		回収率 $\min(\max(RR, 0), 1)$
7	$E(Y) = a + \sum b_j x_j$		回収率 $\log\left(\frac{1-RR}{RR}\right)$
8	$E(Y) = a + \sum b_j x_j$		回収率 $\Phi^{-1}[Beta(RR, \alpha, \beta)]$



正常化した割合

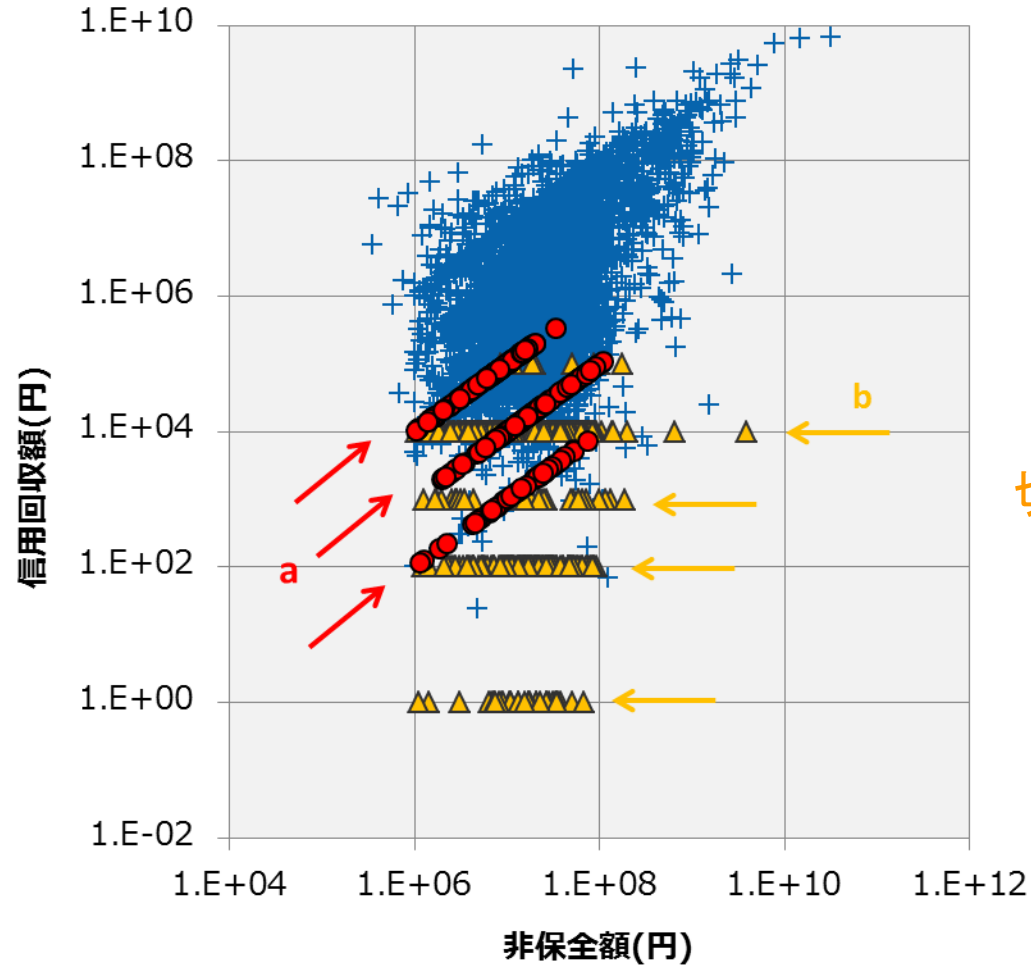


正常化時の累積回収額\*が0円の割合



\*: 36カ月累積回収額

要管理、破綻懸念では回収額が0円から正常化しやすい  
金融機関は回収行動に消極的



EADに対して  
0.01%,0.1%,1%  
定率回収

1円,10円,100円,...  
切り額による定額回収

# 日本リスク・データ・バンク株式会社の デフォルト債権回収データベース\*から抽出した**4,367**件

\*日本の19金融機関が参加するLGD共同データベース

## 「金融機関が**本格的な回収行動**に移った後」を想定

- **実質破綻以下**になってからの**36カ月累積**回収額/回収率
  - 累積回収金額が10万円以下は除外
- **除外対象**
  - 正常復帰: ランクアップして担保解除
  - 滞留: 条件変更を実施して長期間据え置き (回収率は0%)
  - 債権譲渡による処分 (回収率は債務者の属性に依存しない)
  - デフォルト基準時点における貸出残高が1百万円未満
- データ期間はデフォルト時点が**2005年4月**から**2009年10月**

類型	変数名
財務情報	売上高、総資産、自己資本、有利子負債、 現預金比率、自己資本比率、etc
貸出情報	貸出残高、貸出シェア、貸出規模ダミー、 メイン行ダミー、保全状態、etc
属性情報	業種、金融機関ダミー、etc

変数名	model1 GLM, Gamma, RA		model2 GLM, Normal, RA		model3 LM, RA		model4 LM, log(RA)	
	係数	p値	係数	p値	係数	p値	係数	p値
定数項	0.884	0.0003	-0.168	<.0001	63.631	<.0001	-0.478	0.0266
規模小	-0.152	0.1396	-0.018	0.9913	27.936	0.0003	0.327	0.0146
規模中	0.004	0.9451	-0.023	0.8675	33.167	<.0001	0.262	0.0014
金融機関1	-0.474	<.0001	-0.844	<.0001	-144.084	<.0001	-0.466	<.0001
金融機関2	-0.432	<.0001	-0.377	<.0001	-129.465	<.0001	0.176	0.0194
有担保有保証	-1.394	<.0001	-0.176	<.0001	26.683	0.0149	0.338	0.0063
無担保無保証	0.218	0.0075	0.081	<.0001	56.489	<.0001	0.055	0.6269
保証のみ有	-1.202	<.0001	-0.138	<.0001	46.111	<.0001	0.344	0.0037
貸出残高P_1	-0.097	<.0001						
現預金対貸出残高P比率_1	0.052	<.0001						
優良保証比率_1	0.196	<.0001						
純有利子負債対貸出残高比率_1			0.183	<.0001				
自己資本比率_1			-0.071	<.0001				
有形固定資産対負債比率_1			0.030	<.0001				
純有利子負債シェア相当分_4					0.368	<.0001		
流動資産シェア相当分_4					-0.254	<.0001		
経常運転資金_4					0.004	<.0001		
貸出残高P_3							0.650	<.0001
現預金シェア相当分_2							0.900	<.0001
収益弁済対象有利子負債シェア相当分_3							-0.031	<.0001
対数尤度 定数項のみ	-19703.4		-30901.4		-30901.4		-9166.6	
対数尤度 共通モデル	-17169.4		-27880.7		-30715.6		-8467.7	
対数尤度	-17068.2		-27027.8		-27663.0		-8050.6	



変数名	model5 LM, RR		model6 LM, min,RR		model7 LM, RR logit		model8 LM, RR Beta	
	係数	p値	係数	p値	係数	p値	係数	p値
定数項	0.369	<.0001	0.4897	<.0001	0.852	0.0142	-0.155	0.0341
規模小	-0.268	<.0001	0.0218	0.5294	0.073	0.8638	-0.069	0.3851
規模中	-0.077	0.0084	0.0199	0.2793	0.206	0.3616	0.050	0.2706
金融機関1	-0.277	<.0001	-0.294	<.0001	-3.284	<.0001	-0.666	<.0001
金融機関2	-0.195	<.0001	-0.203	<.0001	-2.163	<.0001	-0.468	<.0001
有担保有保証	-0.250	<.0001	-0.0474	0.1227	-0.536	0.1562	-0.023	0.7528
無担保無保証	0.015	0.7182	0.0341	0.1841	0.682	0.0310	0.141	0.0273
保証のみ有	-0.096	0.0431	0.0158	0.5994	0.011	0.9765	0.120	0.0702
優良保証比率_2	0.278	<.0001						
保証担保合計_4	0.001	<.0001						
貸出残高P_1	-0.097	<.0001						
貸出残高P_1			-0.0473	<.0001				
現預金_1			0.0200	<.0001				
優良保証比率_2			0.1671	<.0001				
貸出残高P_1					-0.726	<.0001		
現預金_1					0.291	<.0001		
優良保証比率_2					2.083	<.0001		
貸出残高P_1							-0.138	<.0001
現預金対貸出残高P比率_1							0.045	<.0001
保証担保合計_4							0.001	<.0001
対数尤度 定数項のみ	-4087.6		-2224.4		-13209.0		-6080.9	
対数尤度 共通モデル	-3875.6		-1764.3		-12764.5		-5576.6	
対数尤度	-3646.2		-1664.7		-12629.4		-5462.6	

## A) 実績値と推計値の誤差

$$\text{平均二乗誤差MSE} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (R_j - P_j)^2$$

$$\text{平均絶対値誤差MAE} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |R_j - P_j|$$

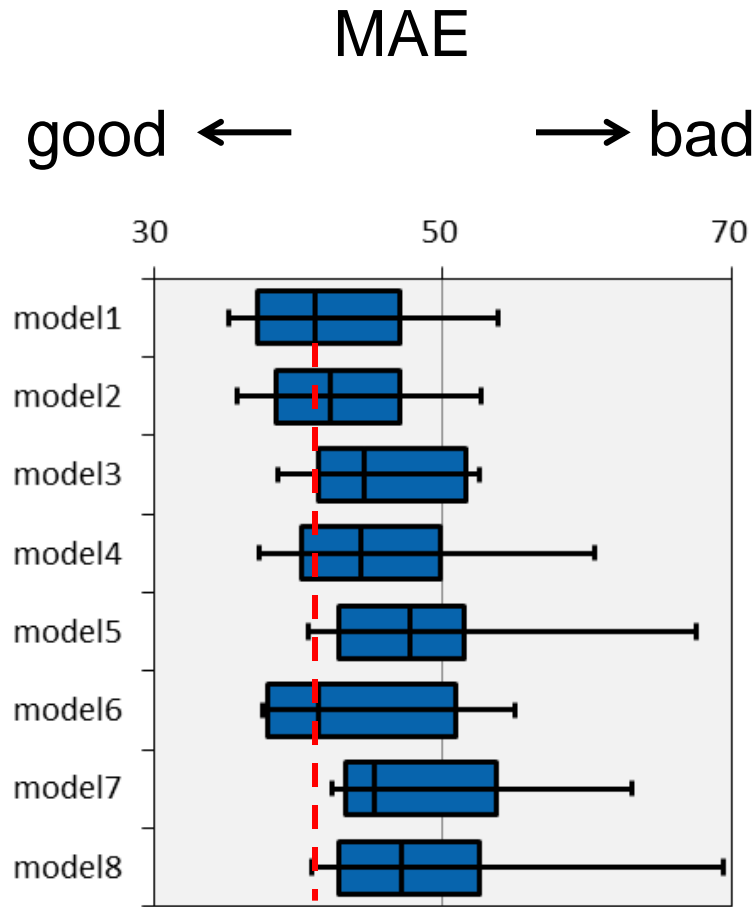
$R$ :実績値、 $P$ :推計値

モデルが回収額を推計する場合、 $\text{回収額}^* \div \text{EAD}$ で $\text{回収率}^*$ に  
モデルが回収率を推計する場合、 $\text{回収率}^* \times \text{EAD}$ で $\text{回収額}^*$ に  
変数変換した場合には再変換して、回収額/回収率に戻す

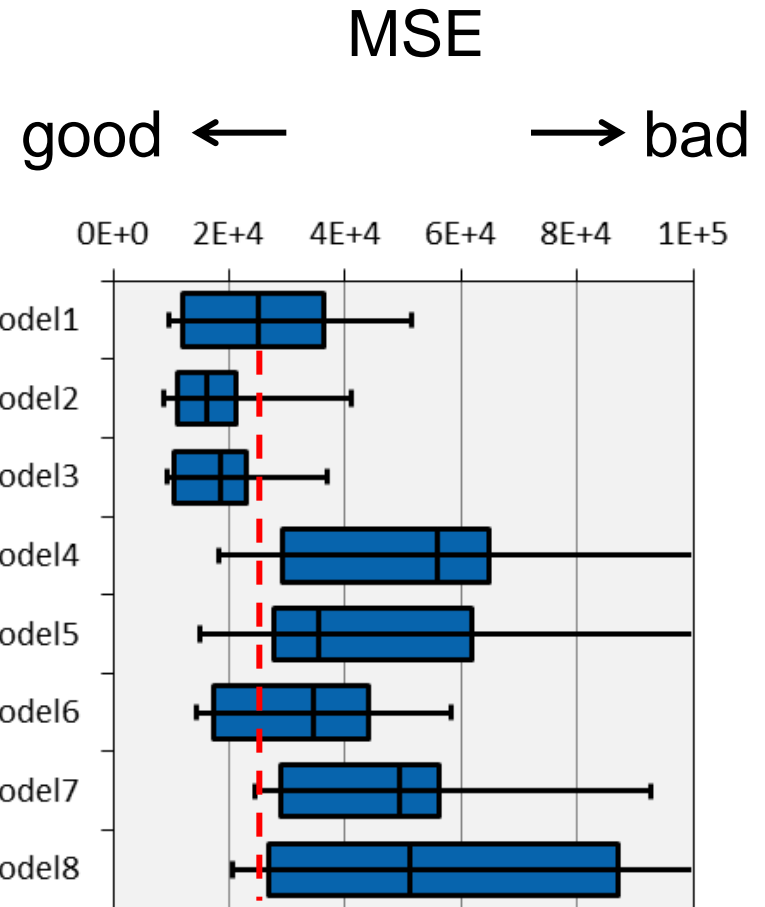
## B) 実績値 $R$ と推計値 $P$ のSpearmanの順位相関係数

### 10交差検証法によって統計量を評価

データを10分割して、9個のサブセットでパラメータ推計  
残った1つのサブセットで統計量を算出

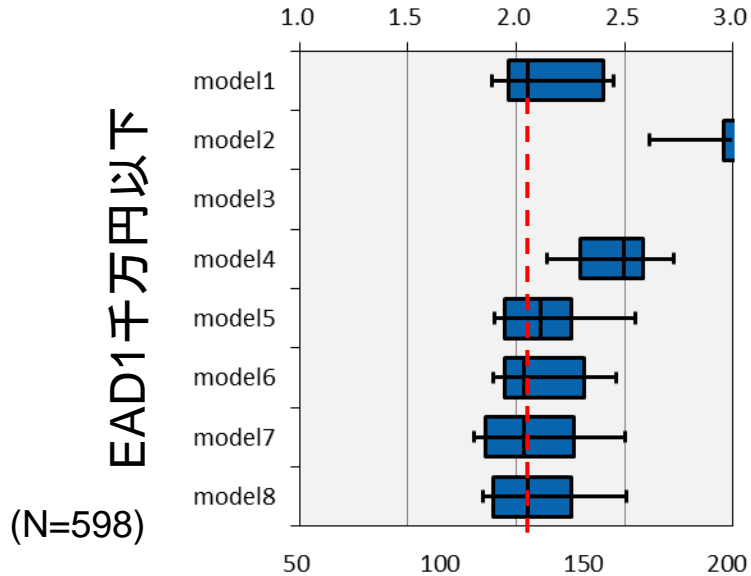


Model1が良好

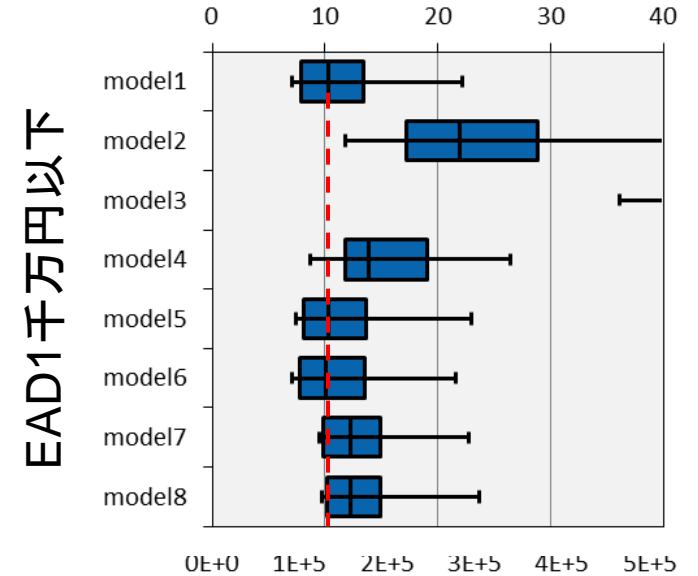


Model2,3が良好で、Model1が準ずる  
回収率を推計値にしたモデルは低性能

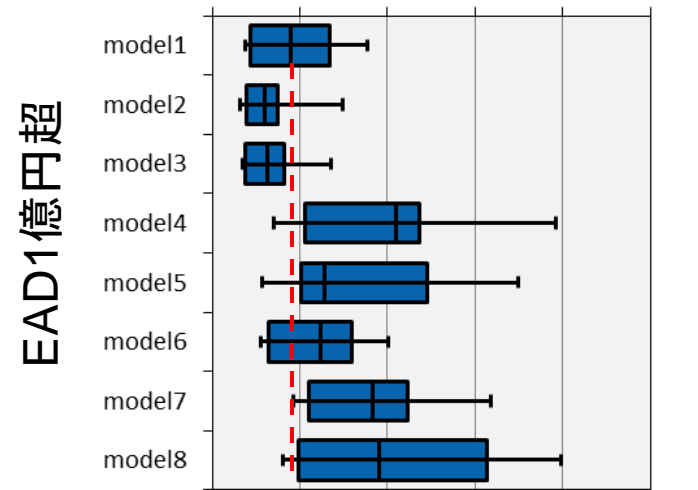
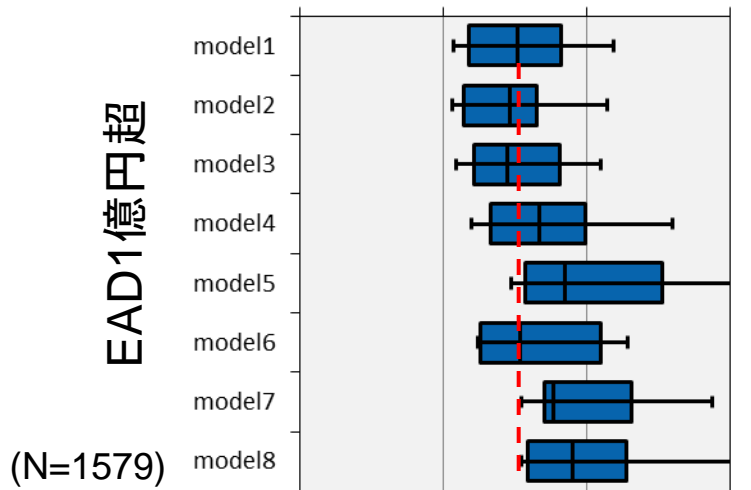
good ← MAE → bad

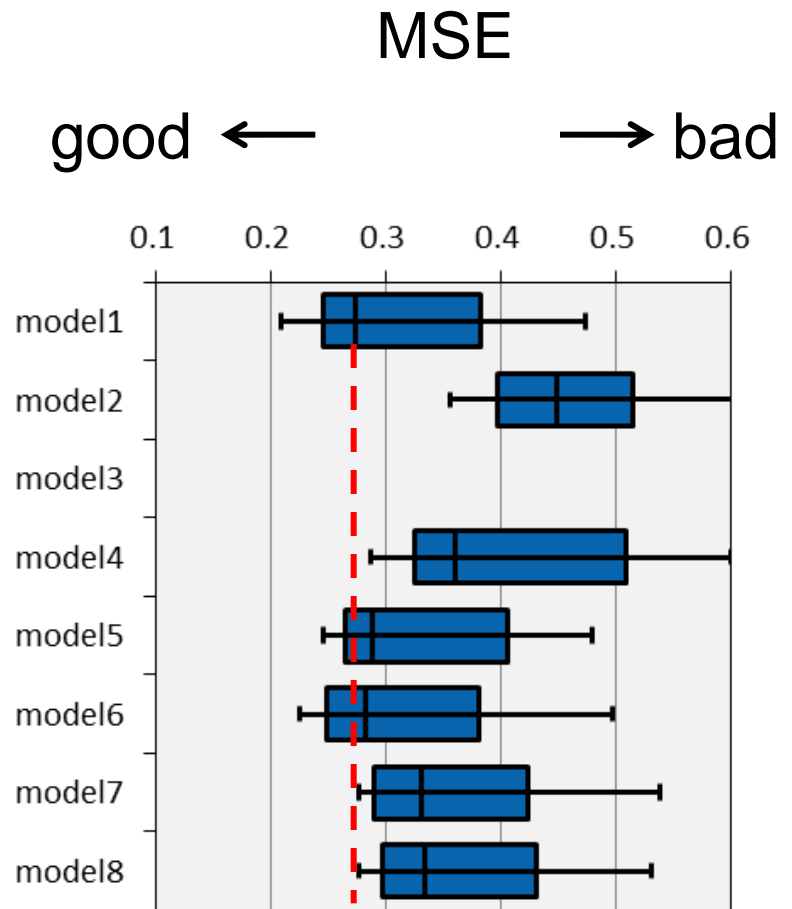
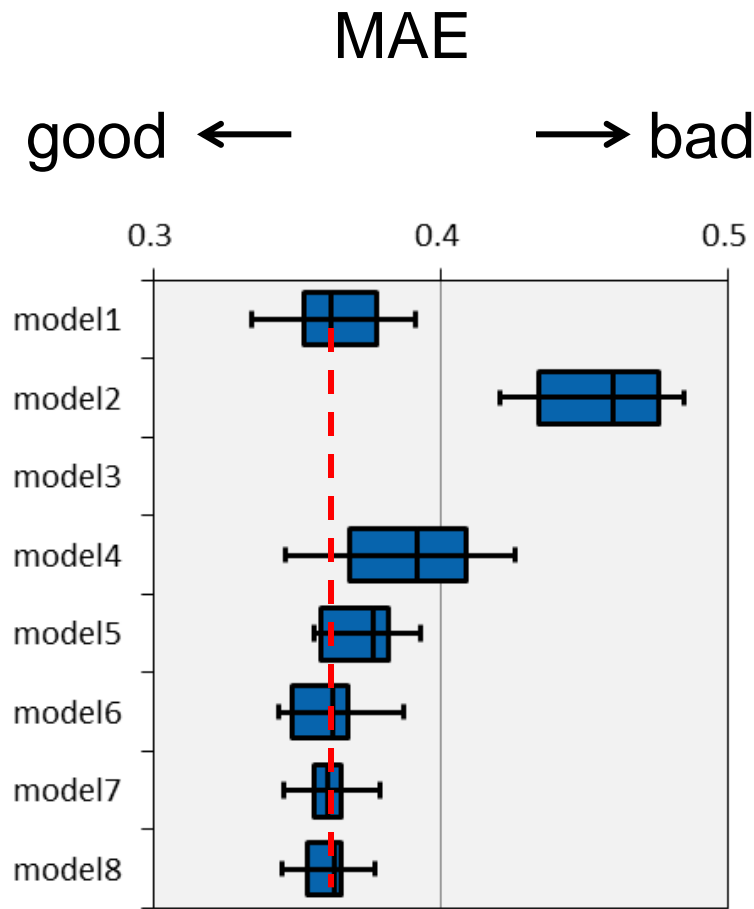


good ← MSE → bad



大きなEADでは Model1が有効



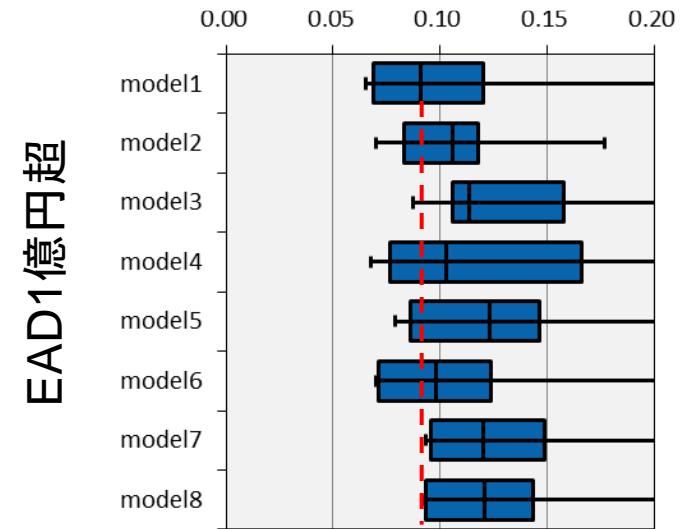
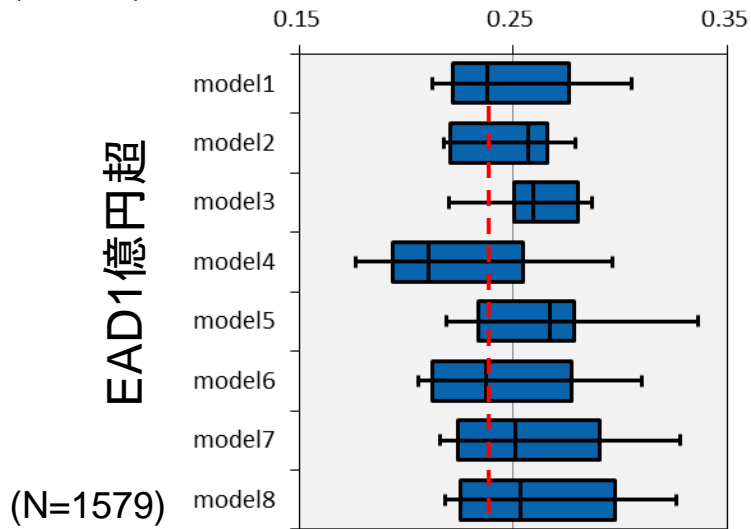
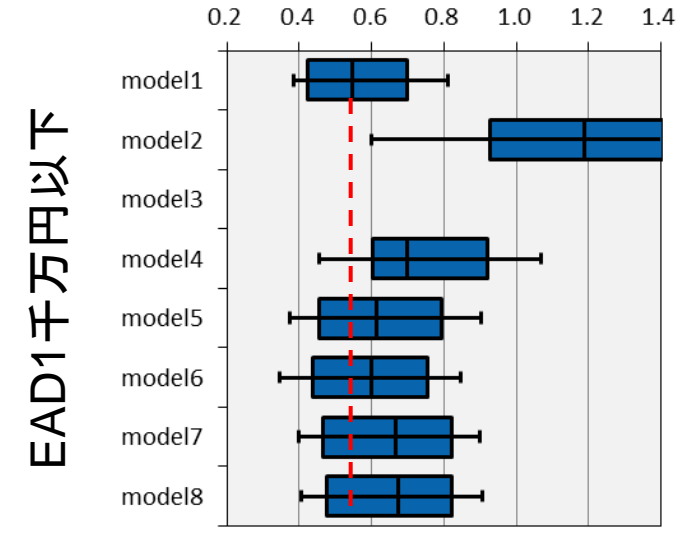
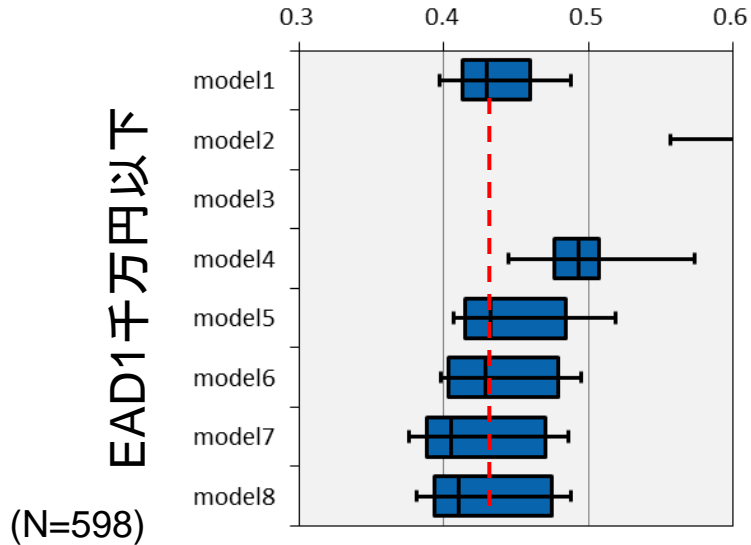


回収額を推計値にしたモデルはModel1を除き低性能

Model1が比較的高い性能

good ← MAE → bad

good ← MSE → bad

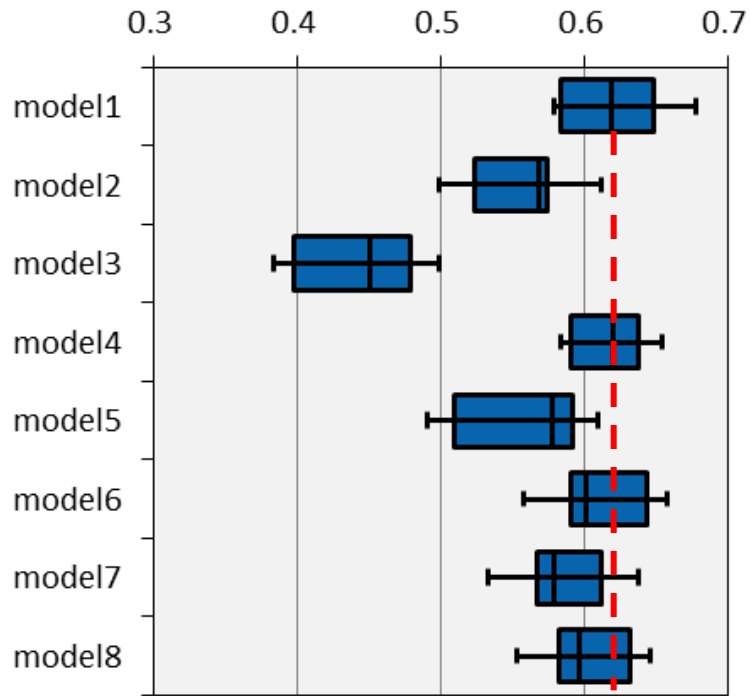


大きなEADでは Model1が有効



### 回収額

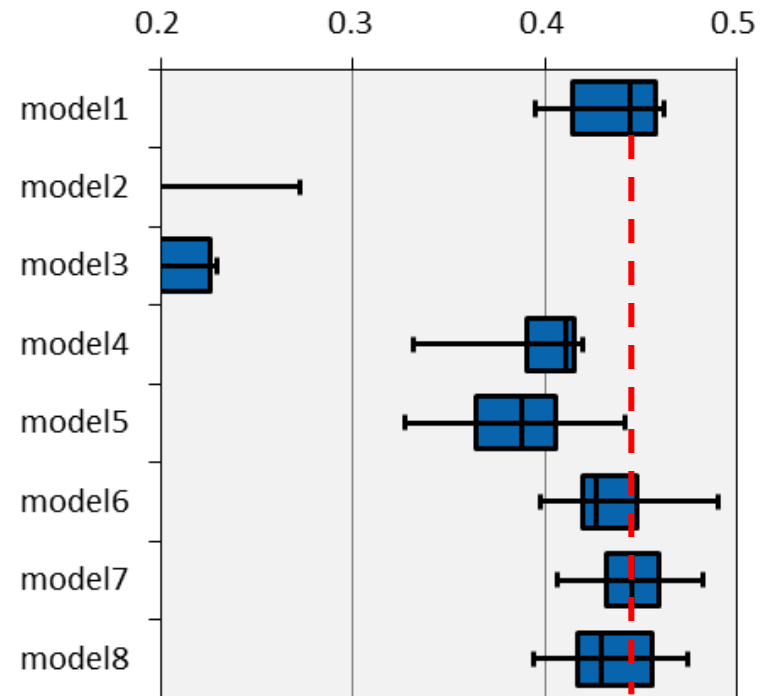
bad ← → good



Model1、Model4が高い性能

### 回収率

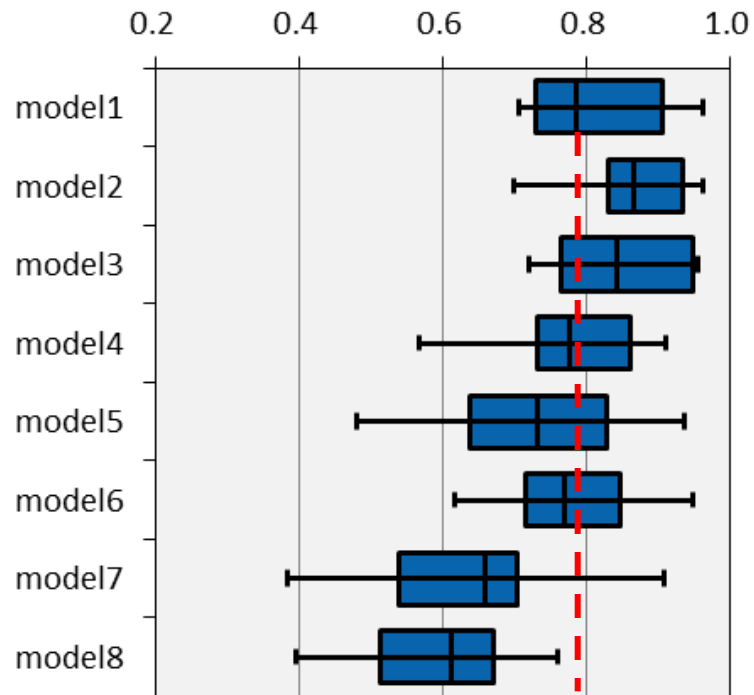
bad ← → good



Model1、Model7が高い性能

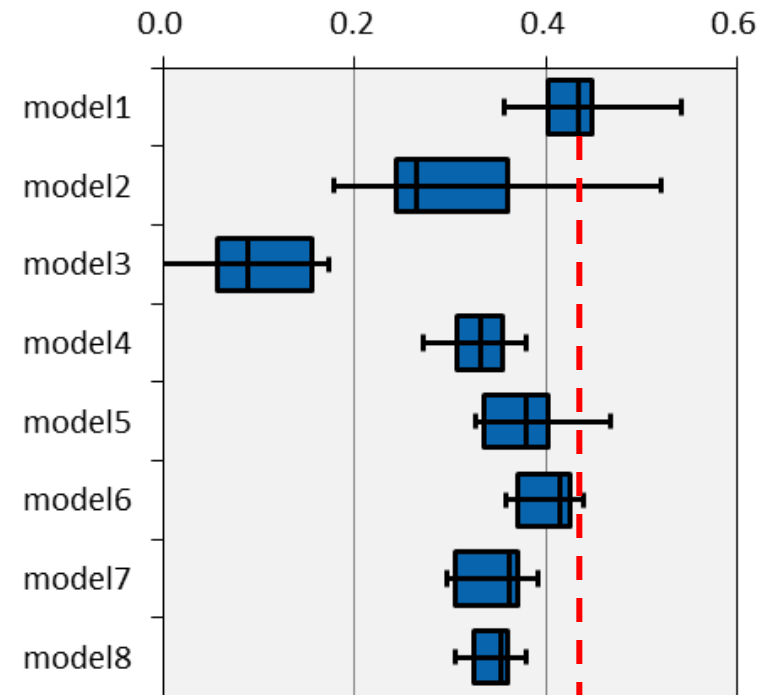
回収額

bad ← → good



回収率

bad ← → good





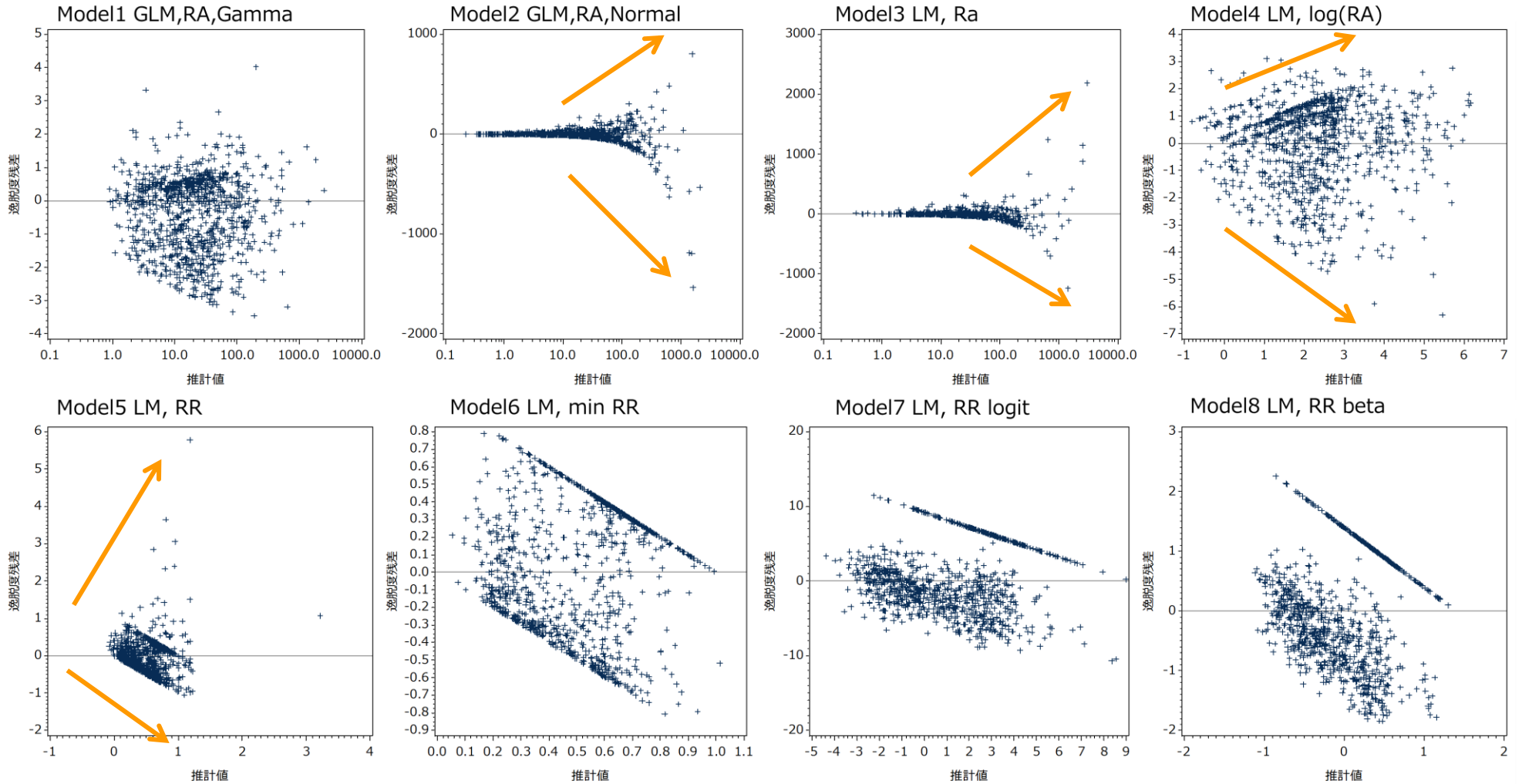
## C) 逸脱度残差(Deviance residual)を用いたモデル診断

$$\text{デビアンズ } D = 2 \sum d_i = 2 \sum [l(y_i) - l(\mu_i)]$$

$$\text{逸脱度残差 } r_d = \text{sign}(y - \mu) \sqrt{d_i}$$

個々のレコードの尤度の差を足し合わせたものを残差とみなす  
線型モデルにおける残差プロットに相当

# モデル別逸脱度残差



Model2~5は推計値が大きくなるに従い、残差の分散が大きくなる

1. 回収源泉別に仕分け
2. 推計対象は回収率ではなく回収額

Gamma回帰モデルの利用

3. 金融機関側の回収行動、意思決定を考慮

データを実質破綻以下に限定

滞留、正常復帰、債権譲渡先の除外

Gamma回帰モデルは回収額、回収率の  
どちらの評価結果でも安定して良いパフォーマンス  
特にEADの大きい先でより有効

1億円のEADと100万円のEADでは前者の推計精度が高い  
⇒金融機関の回収運用の効率化に貢献

- Anderson, Feldblum, Modlin, D.Schirmacher, E.Schirmacher, Thandi(2004)"A Practitioner's Guide to Generalized Linear Models", *Casualty Actuarial Society Discussion Paper Program*
- Annette J.Dobson(2008)[著], 田中豊, 森川敏彦, 山中竹春, 富田誠[訳]『一般化線形モデル入門 原著 第2版』, 共立出版
- Asarnow and Edwards(1995) "Measuring LGD on commercial loans: an 18-year internal study", *Journal of Commercial Lending* , Vol. 77, No. 7 ,pp.11-23
- Dermine and Carvalho(2006) "Bank loan losses-given-default: A case study", *Journal of Banking & Finance*, pp.1243-1291
- Dwyer, Korablev(2009) "Moody's KMV LossCalc™ V3.0" , *Moody's Analytics, manuscript*
- Felsovalyi and Hurt(1998) "Measuring Loss on Latin American Defaulted Bank Loans: A 27-Year Study of 27 Countries", *Journal of Lending & Credit Risk Management*, Vol. 81, No. 2, (October 1998), pp. 41-46.
- Franks, Servigny, Davydenko(2004) "A comparative analysis of the recovery process and recovery rates for private companies in the UK, France and Germany", *Standard and Poor's Risk Solutions*
- Grippa, Iannotti, Leandri(2005)" Recovery rates in the banking industry: stylised facts emerging from the Italian experience" in *Recovery risk : the next challenge in credit risk management* edited by Edward, Altman, Resti, Sironi, Risk Books
- Gupton, Stein(2005)" LossCalc v2: Dynamic prediction of LGD", *Moody's KMV Investors Services*
- Jong and Heller(2008), *Generalize Linear Models for Insurance Data*, Cambridge University Press
- McCullagh and Nelder(1989)"Generalized Linear Models, Second Edition", Chapman & Hall

- 伊藤有希, 山下智志(2007)「中小企業に対する債権回収率の実証分析」金融庁FSAリサーチ・レビュー 2007第4号
- 上野大(2006)「バーゼルⅡにおけるLGDの扱い」『債権回収率・LGDモデルシンポジウム』
- 尾木研三, 戸城正浩, 枇々木規雄(2012)「小企業向け保全回収率モデルの構築と実証分析」JAFEE冬季大会予稿集、pp.33-44
- 川田章広, 山下智志(2012)「回収実績データに基づくLGDの要因分析と多段階モデルによるLGDおよびEL推計」金融庁金融研究センター ディスカッションペーパー DP2012-6
- 久保拓弥(2012)『データ解析のための統計モデリング入門』,岩波書店
- 尾藤剛(2011)『ゼロからはじめる信用リスク管理』,きんざい,p.297
- 三浦翔, 山下智志、江口真透(2010)「内部格付手法における回収率・期待損失の統計型モデル：実績回収率データを用いたEL・LGD推計」金融庁FSAリサーチ・レビュー2010第6号
- 森平爽一郎(2009)「信用リスクモデリング-測定と管理」朝倉書店,pp.137-158

本資料については、作成時点における著者らの見解を示しており、日本リスク・データ・バンク株式会社の意見を表明するものではない。また、ありうべき誤りは全て著者たち個人に属する。